

# 命题逻辑最大可满足性问题的局部搜索算法

New local search methods for partial MaxSAT. Artificial Intelligence 2016

Shaowei Cai\*, Chuan Luo, Jinkun Lin, Kaile Su

Corresponding: [caisw@ios.ac.cn](mailto:caisw@ios.ac.cn); <http://lcs.ios.ac.cn/~caisw/>

- 问题背景

- 命题逻辑公式的可满足性判定 (SAT) 是第一个NP完全问题，是计算机科学核心问题，要求判定一个命题逻辑公式是否存在使得公式为真的赋值。

例子：公式  $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$  是可满足的，一个可满足赋值为  $x_1 x_2 x_3 = 001$ 。

- 当公式不可满足时，人们关心如何满足尽可能多的子句，这就是最大可满足性问题 (MaxSAT)。
- 这两个问题有许多应用，吸引了许多著名学者，国际学术界也成立了SAT协会，举办了SAT比赛和MaxSAT比赛。
- 由于NP难度，精确算法的可扩展性不能得到保证，如何高效地近似求解MaxSAT是重要的研究方向。

- 研究动机和贡献

- **Partial MaxSAT**问题，是包含硬约束和软约束的MaxSAT问题，相比于SAT和一般的MaxSAT能更自然地刻画许多现实应用问题。
- 局部搜索是最主要的近似求解方法，在SAT和只有软子句的MaxSAT上取得很大成功。
- 然而，对于Partial MaxSAT问题，由于其特殊结构，局部搜索的算法设计一直是个难题，自1995年Bart Selman首次尝试以来，该方向虽有小改进，没有本质进展，甚至对几千变量的小实例也常常求不出可行解。
- 挑战问题：如何设计出高效求解Partial MaxSAT的局部搜索算法？
- 贡献：提出新方法取得Partial MaxSAT局部搜索方向20年来第一个突破，可求解几十万变量、几百万子句规模的工业问题实例。

- 主要创新

概括

- 以前算法：保持和SAT局部搜索相同框架，通过给硬约束分配很大权重，进而把整个公式当作一个Weighted MaxSAT公式进行求解。
- 我们算法：把公式拆分为一个SAT公式+一个MaxSAT公式，设计双体系框架，可看作两个子算法的交互。

具体

- 提出hard scoring function 和soft scoring function。
- 针对SAT子公式采用约束加权技术。
- 第一次提出带偏好的单元子句传播技术用于产生搜索的初始解。

---

**Algorithm 1: Dist.**

---

```

Input: PMS instance  $F$ ,  $cutoff$ , parameters  $wp$ ,  $t$  and  $sp$ 
Output: A feasible assignment  $\alpha^*$  of  $F$ , or "no feasible assignment found"
1  $\alpha :=$  randomly generated truth assignment;
2  $cost^* := +\infty$ ;
3 while elapsed time <  $cutoff$  do
4   if  $\nexists$  falsified hard clauses &  $cost(\alpha) < cost^*$  then
5      $\alpha^* := \alpha$ ;  $cost^* := cost(\alpha)$ ;
6   if  $H := \{x | hs(x) > 0\} \neq \emptyset$  then
7      $H' := \{\text{variables chosen from } H \text{ via } t \text{ samples with replacement}\}$ ;
8      $v :=$  the variable with the greatest  $hscore$  in  $H'$ 
9   else if  $S := \{x | hs(x) = 0 \& ss(x) > 0\} \neq \emptyset$  then
10     $v :=$  a variable in  $S$  with the greatest  $sscore$ , breaking ties randomly;
11  else
12    update weights of hard clauses according to HPAWS;
13    if  $\exists$  falsified hard clauses then  $c :=$  a random falsified hard clause;
14    else  $c :=$  a random falsified soft clause;
15    if with probability  $wp$  then  $v :=$  a random variable in  $c$ ;
16    else  $v :=$  a variable in  $c$  with the greatest  $sscore$ ;
17     $\alpha := \alpha$  with  $v$  flipped;
18 if  $cost^* \leq \#\text{(soft clauses)}$  then return  $(cost^*, \alpha^*)$ ;
19 else return "no feasible assignment found";

```

---

- 主要成绩及应用

- 囊括了近三年MaxSAT比赛不完备组约一半的冠军奖项（13/27）。之前Partial MaxSAT局部搜索从未获奖。从参赛算法所采用方法来看，局部搜索最近两年已经成为MaxSAT的两个主流方法之一。
- 自2014年提出第一版本至2016年改进版本，一直保持state of the art。比如，CAV Award得主Joao Marques-Silva教授提出新算法（AAAI 2015, pp.1973-1979），其论文称，唯独在结构化实例输给Dist。“The only exception is the pms-crafted set, where LBX shows a slightly worse behavior than Dist.”
- 应用一：与MIT学者合作，将Dist方法扩展到weighted PMS，在蛋白质设计问题取得很好效果（Artificial Intelligence 2017, 通讯作者）。
- 应用二：我们的MaxSAT求解器被美国工程院院士、UC Berkely教授Gerbrand Ceder用于材料研究，相关论文发表于Physical Review B 94 (13), 134424。