

变量版洛瓦兹局部引理

Variable-Version Lovász Local Lemma: Beyond Shearer's Bound

何昆 李梁 刘兴武 王彧弋 夏盟佶(62661644 mingji@ios.ac.cn) FOCS 2017:451-462

Lovász局部引理 (LLL) 是最重要的概率方法之一，在组合数学、理论计算机科学等领域都有很多应用。给定一组随机事件的依赖关系，局部引理考虑在什么概率下，这些事件一定无法覆盖整个概率空间。

下面的例子，考虑随机事件的概率都相等时，覆盖整个空间所需最小概率（边界概率）。

任务一

要求A和B互相独立。
(边表示依赖，无边的互相独立。
只谈事件，没有变量，叫做抽象版)

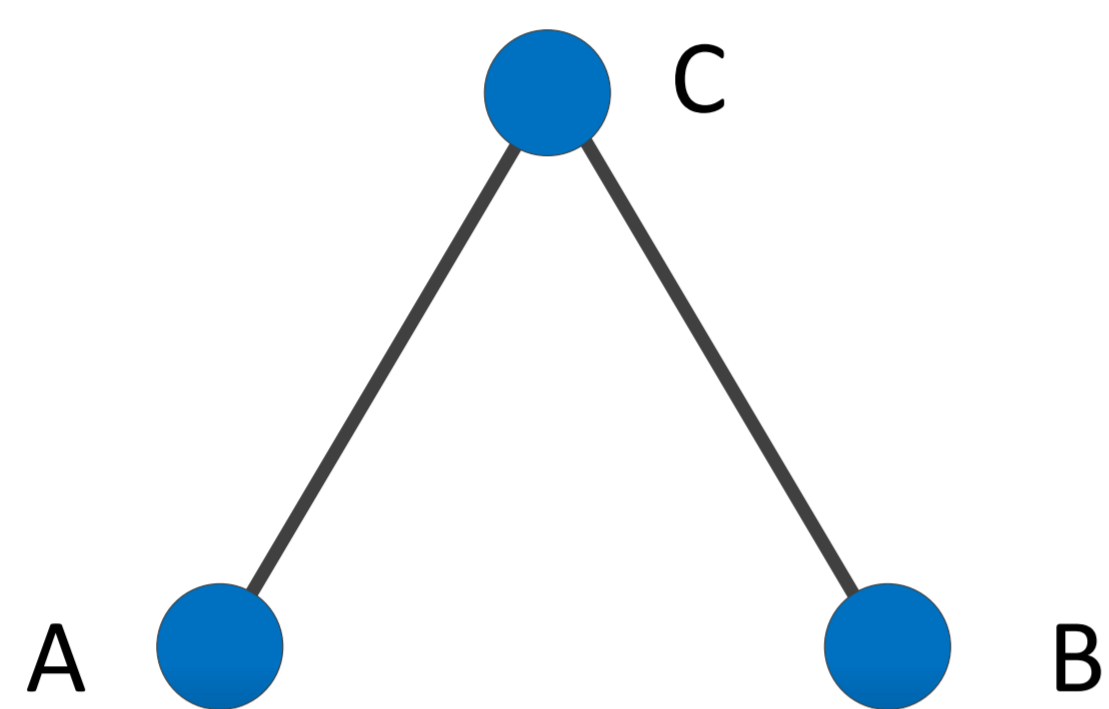
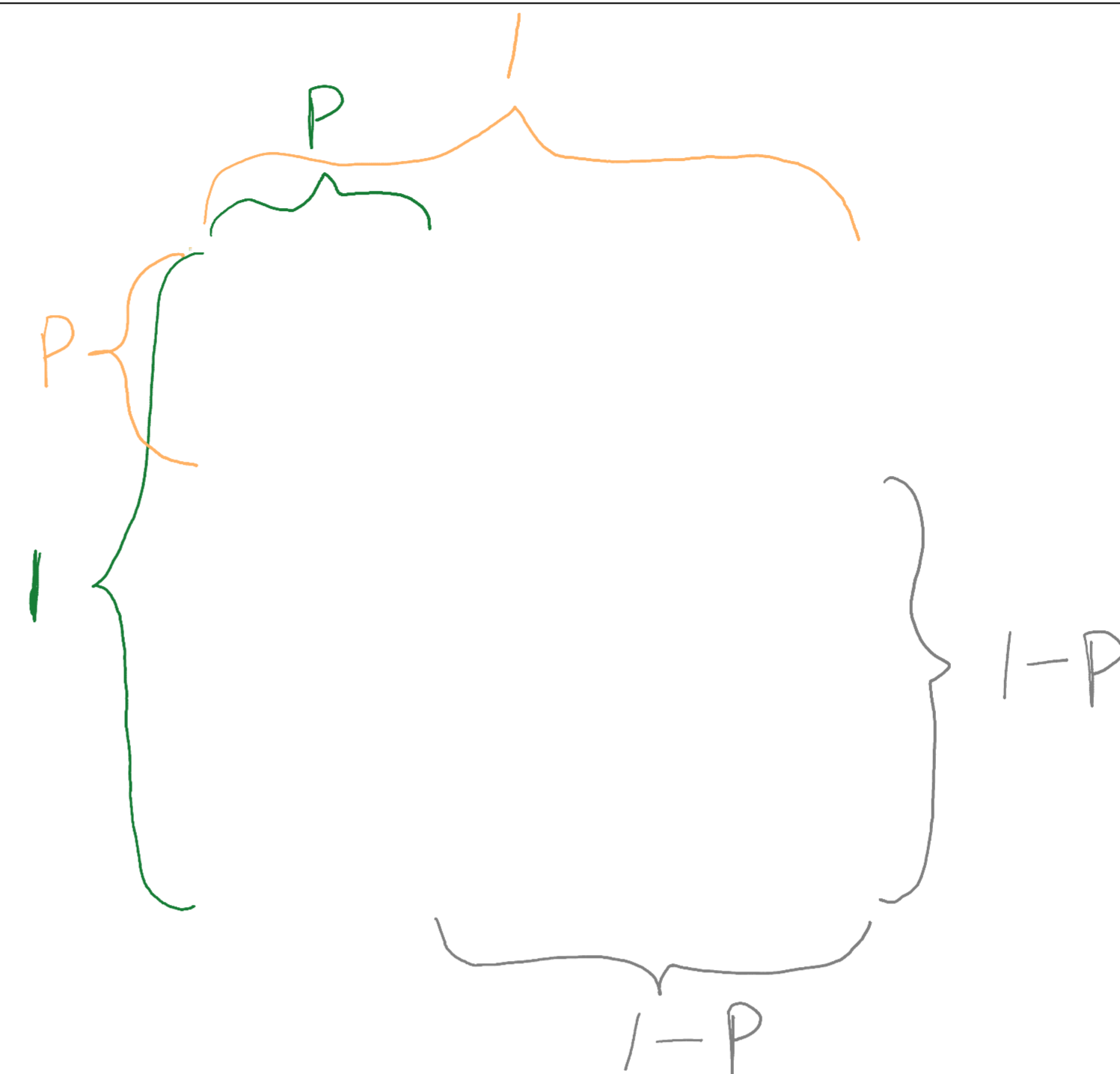


图1

中标方案



A、B、C概率（面积）都是p。

$$3p - p^2 = 1$$

$$p = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} > \frac{1}{3}$$

(抽象版的Shearer界)

任务二

A、B、C可任意依赖。

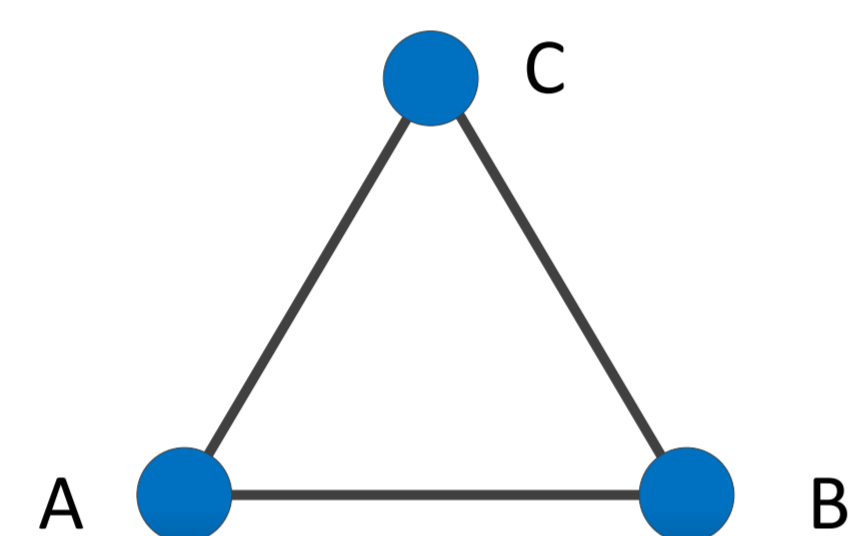
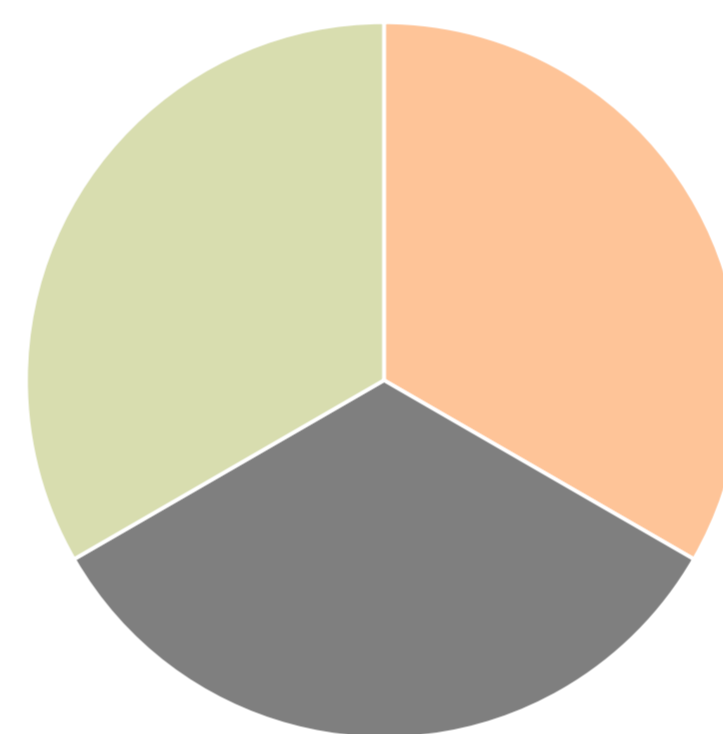


图2

中标方案



A、B、C概率都是 $\frac{1}{3}$ 。

任务三

x, y, z是三个独立随机变量。

A依赖x, y, 独立于z。

B依赖y, z, 独立于x。

C依赖z, x, 独立于y。

记为 A: x, y

B: y, z

C: z, x

(这是任务二的变量版之一。)

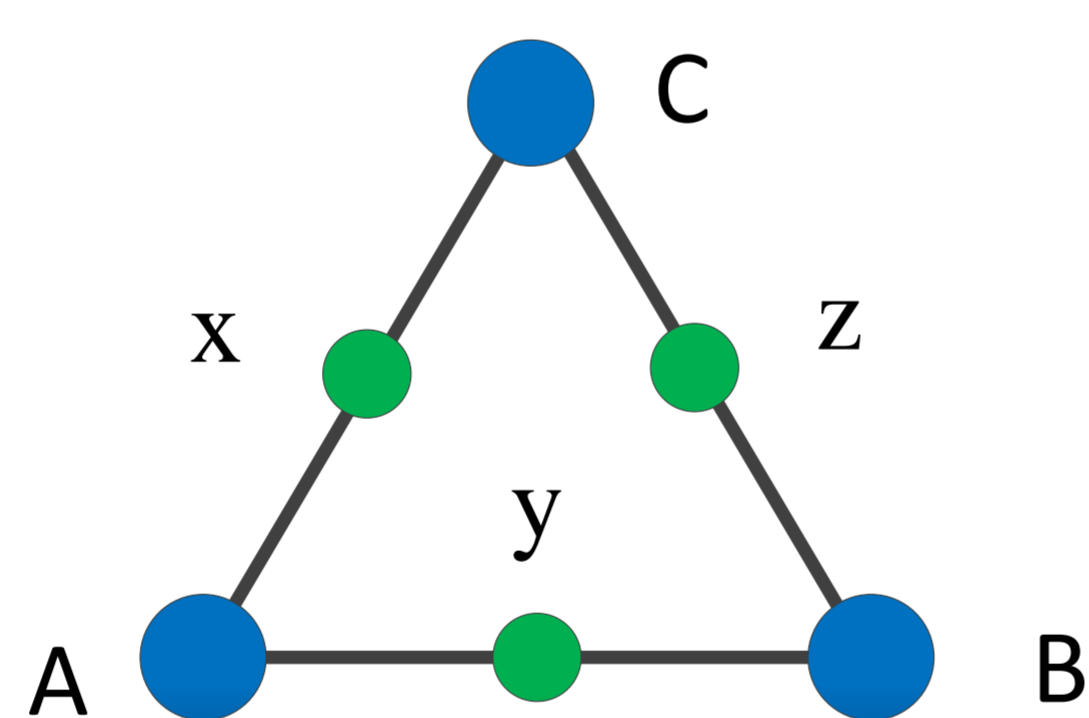
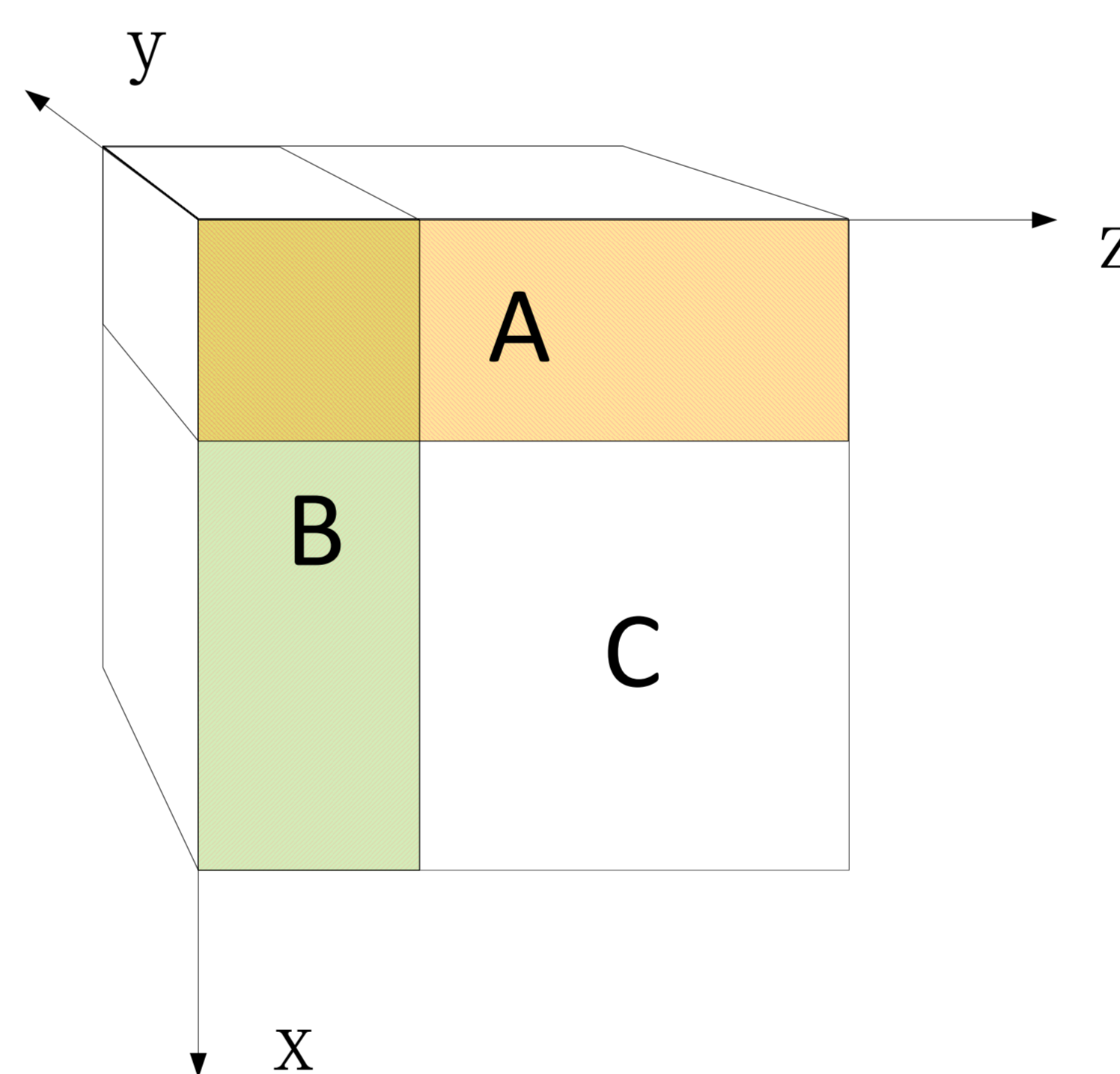


图3

中标方案



A、B、C概率都是p。

A和B可依赖y，但在此方案中它们独立于y，所以也是下图的方案。

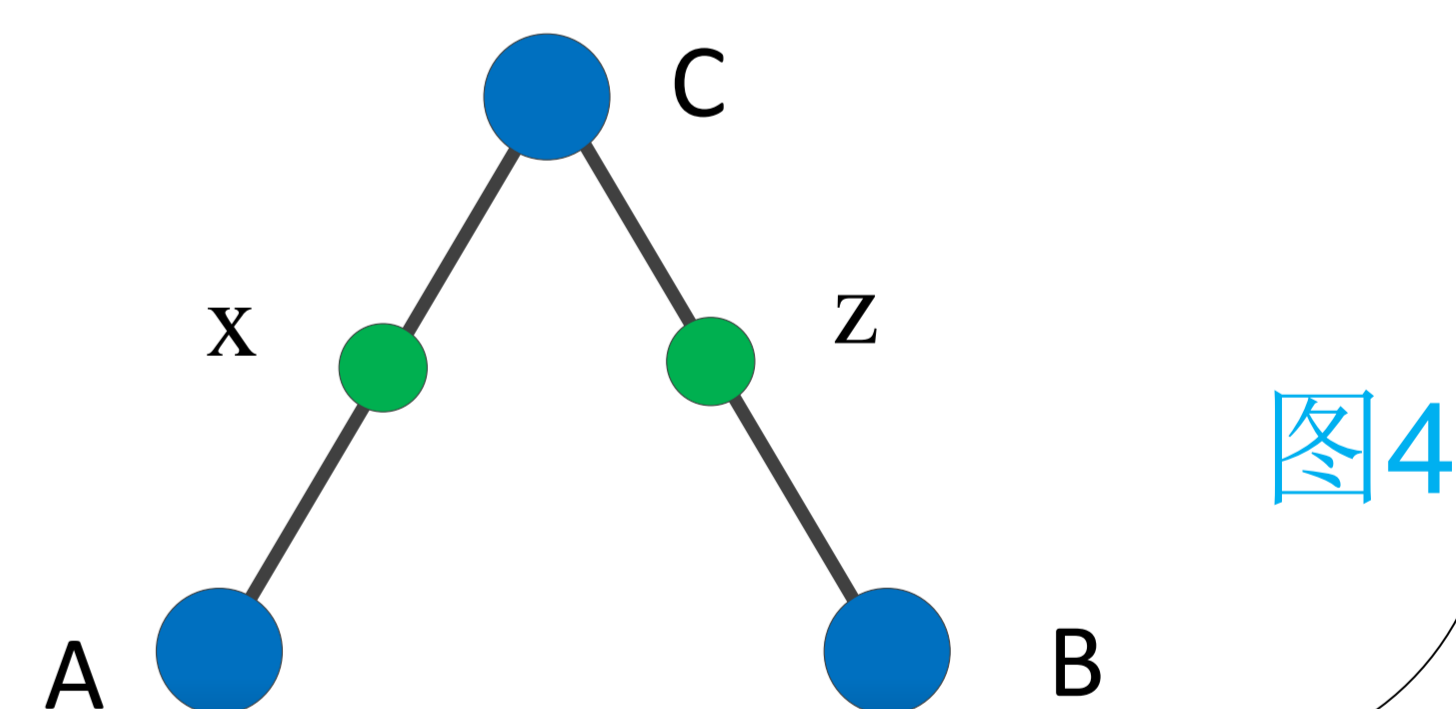


图4

1. 证明了连续变量版本LLL的离散化，给出了其边界概率的优化问题刻画形式，证明了边界概率问题计算上是#P难的。
2. 证明了依赖图是树、弦图时，抽象版和变量版LLL边界相同。（例如图1和图4的边界相同。）
3. “破坏”：任何长度的环，变量版LLL的任一边界概率，可以通过省掉某一个变量的图实现。（例如图3的边界概率，一定可以省掉x,y,z中的某一个实现，即可以由图4和图4的兄弟实现。）
4. n个变量， $\binom{n}{k}$ 个事件，每个事件依赖n个变量中的k个，称之为 $\binom{n}{k}$ 组合数图。
证明了若干组合数图的两种LLL边界是否相同，例如：

➤ $\binom{3}{2}$ 图边界不同，即图2和对应的抽象版图3边界不同。

➤ 对任何常数c，当n充分大时， $\binom{n}{n-c}$ 边界相同。

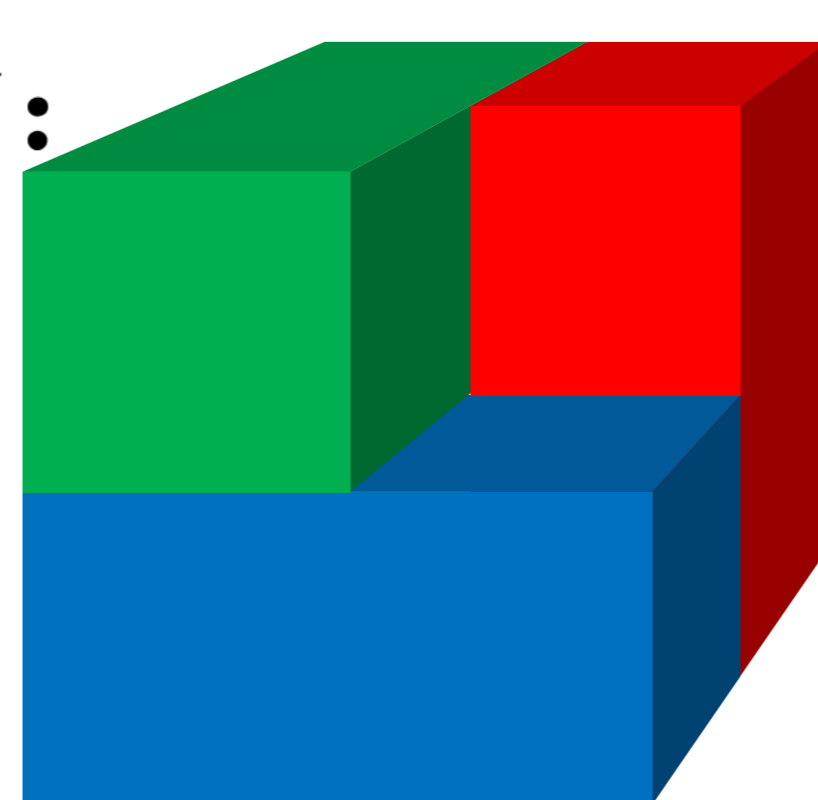
➤ $\binom{4}{3}$ 图边界相同。因为：

A: x, y

B: y, z

C: z, x

D: x, y, z



➤ $\binom{7}{5}$ 图边界不同。因为：

A: x, u, v, w

B: y, u, v, w

C: x, y, u

D: x, y, v

E: x, y, w