多项式离散系统的可达-规避集合内逼近

薛白，詹乃军，Martin Fränzle

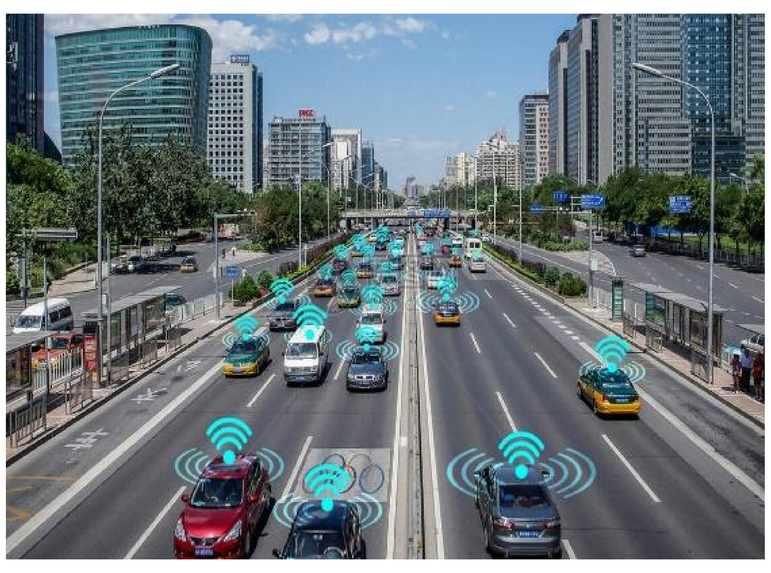
Reach-avoid Analysis for Polynomial Discrete-time Systems，CDC2020，867-873，2020

薛白、**135552483249、xuebai@ios.ac.cn**

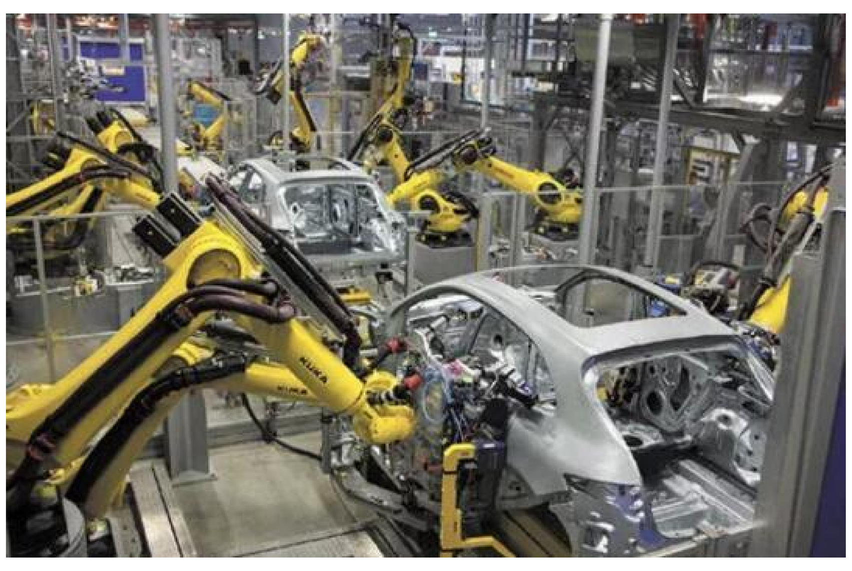
可达-规避集合：使系统进入目标区域且在进入目标区域前在安全区域运行的初始状态集合

国家重大需求

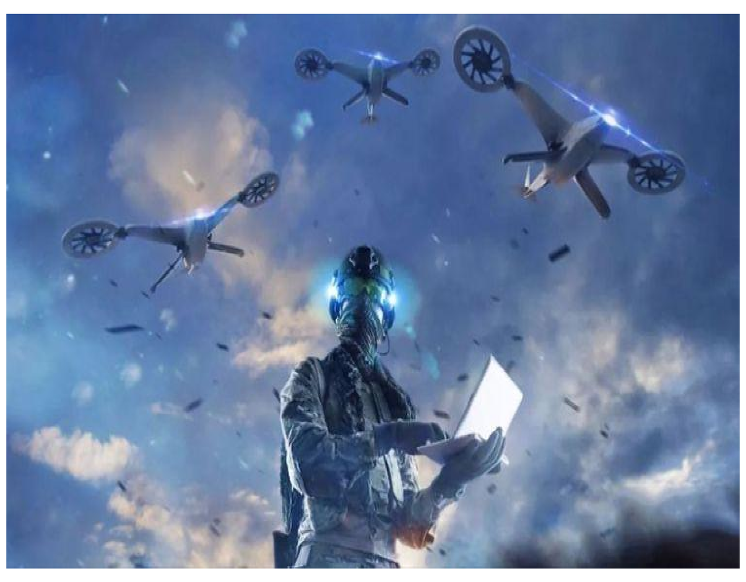
✓用于路径规划、碰撞规避、目标检测等，设计让人们放心使用的安全攸关信息物理融合系统



智能交通



工业互联网



无人机作战

1. 问题

1.1 多项式离散系统

$$x(l+1)=f\big(x(l)\big),\forall l\in\mathbb{N},\quad (1)$$

$$x(0)=x_0\in\mathbb{R}^n,$$

其中 $f(x)=\big(f_1(x),\dots,f_n(x)\big)^\top$，$f_i(x)$ 是关于x的多项式函数，$i=1,\dots,n$。

1.2 可达-规避集合内逼近

可达-规避集合RA是使得系统(1)最终进入目标区域 $\mathrm{TR}=\{x\in\mathbb{R}^n\mid g(x)<1\}$且在进入目标区域前在安全区域$\mathrm{X}=\{\mathrm{x}\in\mathbb{R}^n\mid h_0(\mathrm{x})\le 0\}$运行的初始状态集合，即

$$\mathrm{RA}=\left\{x_0\in X\;\middle|\;\begin{matrix}\exists l\in\mathbb{N}.x(l)\in TR\wedge\\ \wedge_{j=1}^{l}x(j)\in X\end{matrix}\right\},$$

其中$g(x)$和$h_0(\mathrm{x})$为x的多项式函数。

可达-规避集合RA内逼近是可达-规避集合RA的一个子集。 其计算属于非凸、NP问题。

2. 理论方法

2.1 理论突破

定理1 如果存在有界函数$v(x):\hat{X}\to\mathbb{R}$和 $w(x):\hat{X}\to\mathbb{R}$ 使得对$x\in\hat{X}$,

$$v(x)=v\left(\hat{f}(x)\right),$$

$$v(x)=g(x)+w\left(\hat{f}(x)\right)-w(x),$$

那么 $\mathrm{RA}=\{x\in\hat{X}\mid v(x)<1\}$，其中$\hat{\mathrm{X}}=\{x\in\mathbb{R}^n\mid h(x)\le 1\}\supseteq \mathrm{X}\cup\{x\mid x=f(x_0),x_0\in X\},\hat{f}(x)=1_{\mathrm{TR}}(x)\cdot 0+1_{\hat{\mathrm{X}}\setminus X}(x)\cdot 0+1_{\mathrm{TR}}(x)\cdot f(x)$。

推论1 如果存在有界函数$v(x):\hat{X}\to\mathbb{R}$和 $w(x):\hat{X}\to\mathbb{R}$ 使得对$x\in\hat{X}$,

$$v(x)\ge v\left(\hat{f}(x)\right),$$

$$v(x)\ge g(x)+w\left(\hat{f}(x)\right)-w(x),$$

那么 $\{x\in\hat{X}\mid v(x)<1\}$是可达-规避集合RA的内逼近。

2.2 凸优化计算

由推论1和$g(x)\ge 1,\forall x\in\hat{X}\setminus\mathrm{X}$ 得到：

$$v(x)\ge v\big(f(x)\big),\forall x\in X\setminus\mathrm{TR},$$

$$v(x)\ge g(x)+w\big(f(x)\big)-w(x),\forall x\in X\setminus\mathrm{TR}$$

$$v(x)\ge 1,\forall x\in\hat{X}\setminus\mathrm{X}$$

⇩

$\{x\in\hat{X}\mid v(x)<1\}$是可达-规避集合RA的内逼近

当$v(x)$和$w(\mathrm{x})$为x的多项式函数时，利用平方和分解，将上述约束的求解转化为凸优化计算可达-规避集合RA的内逼近：

$$\min \mathrm{c}\cdot\widehat{w}$$

s.t.

$$v(x)-v\big(f(x)\big)+s_0(x)h_0(x)+s_1(x)\big(1-g(x)\big)\in\sum[x],$$

$$v(x)-g(x)-w\big(f(x)\big)+w(x)+s_2(x)h_0(x)+s_3(x)\big(1-g(x)\big)\in\sum[x],$$

$$v(x)-1+s_4(x)h(x)-s_5(x)h_0(x)\in\sum[x],$$

其中$\mathrm{c}\cdot\widehat{w}=\int_{\hat{X}}v(x)dx$， c为函数$v(x)$的未知系数， $\widehat{w}$为积分$\int_{\hat{X}}v(x)dx$所得常数， $\mathrm{s_i}(x)\in\sum[x],i=0,\dots,5,\sum[x]$为平方和函数集合。

优势：将非凸、NP 问题转化为多项式时间可求解的凸优化问题

多项式离散系统的可达-规避集合内逼近
薛白，詹乃军，Martin Fränzle