



调和叶状结构和全纯二次微分在高亏格三维模型保角参数化上的应用

Global Conformal Parameterization via an Implementation of Holomorphic Quadratic Differentials

赵辉，王少东，王文成

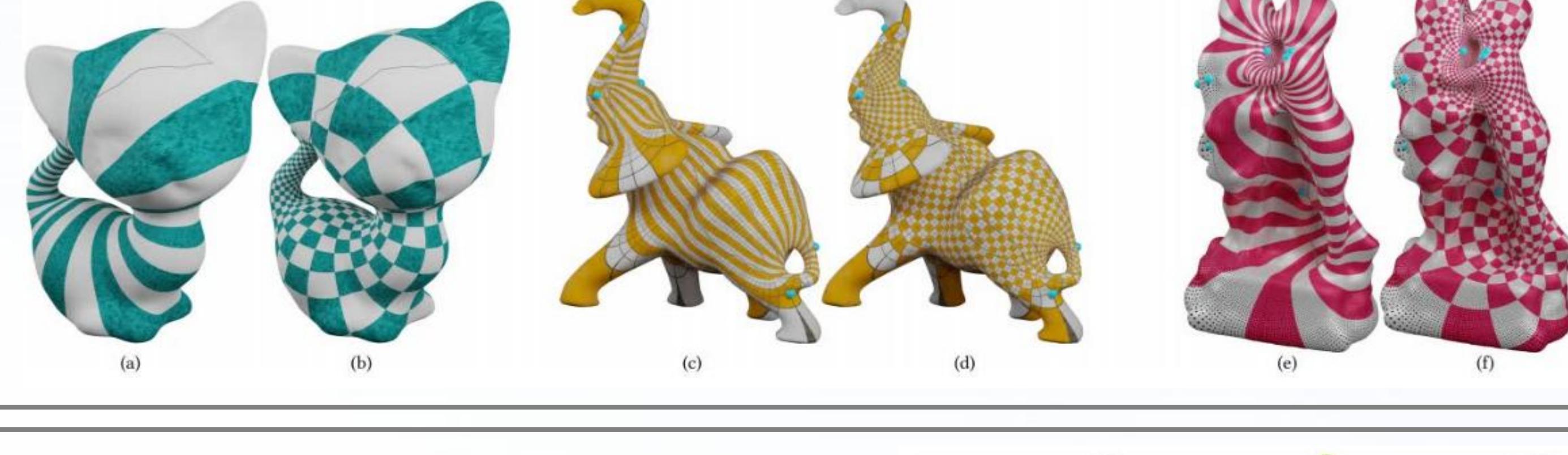
赵辉，13552857243, huizhao@ios.ac.cn

IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2020 Aug, 13

DOI: [10.1109/TVCG.2020.3016574](https://doi.org/10.1109/TVCG.2020.3016574)

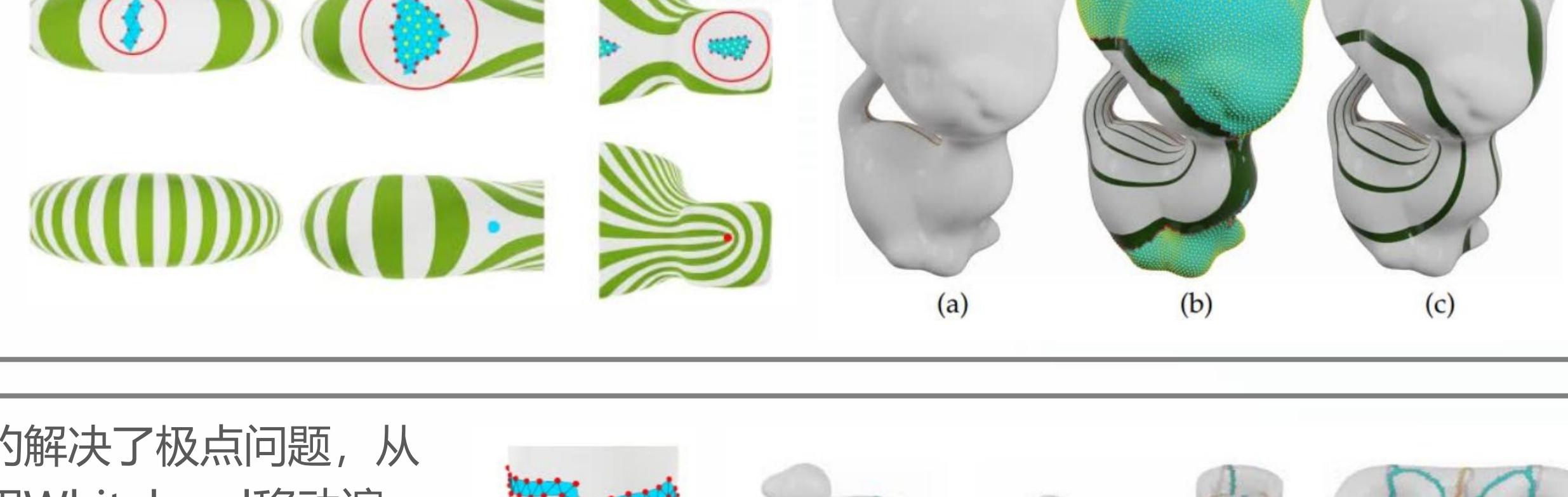
研究背景

曲面上的全纯二次微分和调和叶状结构几何结构的离散化是目前计算数学里的一个难点。右图中条纹是调和叶状结构的直观表示，格子是全纯二次微分的形象展示。这两个几何结构在计算机图形学的全局参数化，四边形网格化，有限元计算等应用里具有重要的作用。



科学难题

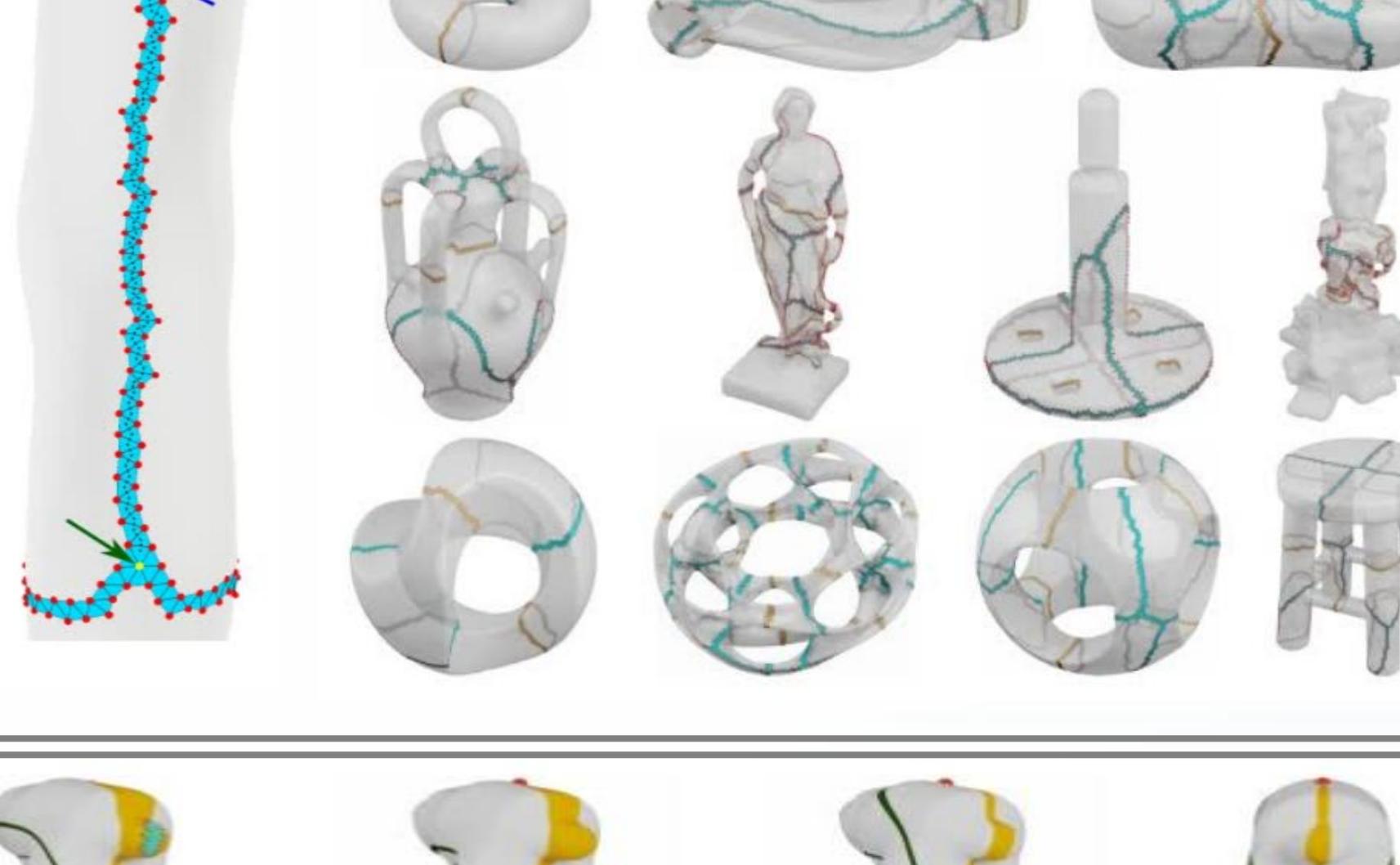
目前国际上的研究提出的算法中，调和叶状结构无法收敛是当前存在的难点，从而在生成的叶状结构中存在不可避免的极点（pole），如右图中红框所示极点。这样就无法得到调和的，也就是最光滑的结果。而全纯二次微分可以认为是两个没有极点的互相垂直的调和叶状结构构成。



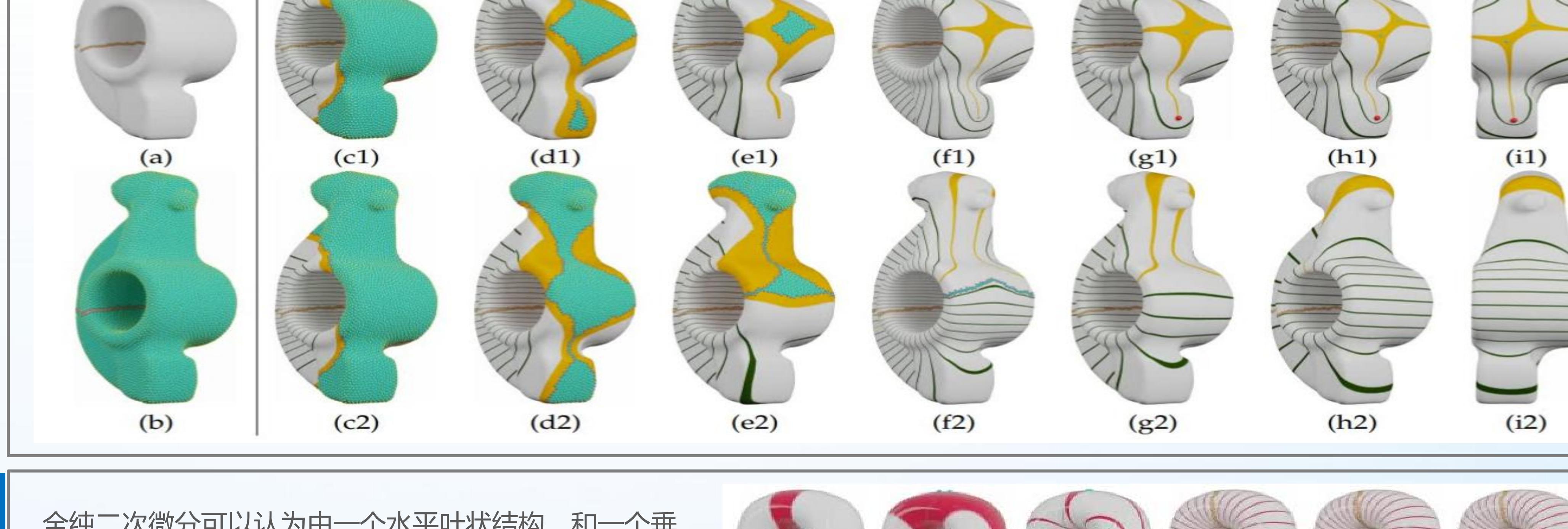
创新点

我们提出了一个新的三步走的扩散遍历方法，成功的解决了极点问题，从而生成没有极点的调和叶状结构。第一步，我们先用Whitehead移动遍历顶点，遍历的结果得到一个叶状结构图，如右图所示。这一步中，不会产生极点。第二步，我们对叶状结构图上的顶点进行Whitehead遍历，图上的顶点由于处于一个狭窄的区域，也无法产生极点。第三步，我们对所有的顶点进行优化，直到能量达到最小值。

如下图所示第二行是我们扩散方法得到的没有极点的结果，第一行是国际上相关算法的结果，这种方法不可避免生成红色的极点。



调和叶状结构



全纯二次微分

全纯二次微分可以认为由一个水平叶状结构，和一个垂直叶状结构构成。在调和叶状结构的基础上，我们提出了一个通过对偶模型的方法来得到全纯二次微分。然后再把对偶模型上的结果平均到主模型的顶点上。全纯二次微分诱导了一个自然坐标，从而我们可以成功的计算出近似的自然坐标。这个自然坐标可以用于高亏格三维模型的保角参数化。如右图所示亏格为3的三维模型参数化保角参数化贴图。

全纯二次微分公式表示如下：

$$\Omega_\alpha = \Omega_\alpha(z_\alpha) dz_\alpha^2,$$



成果展示



研究的意义和价值

调和叶状结构的生成及用于高亏格模型的全局保角无缝参数化研究。叶状结构将一个流形分解为不重叠的低维子流形的组合的结构。但已有方法不能保证生成调和叶状结构，会不收敛而产生奇异情况，影响相关的模型处理质量。我们分析了叶状结构生成不收敛的原因，提出了相关的克服方法，由此可生成调和叶状结构。基于此，我们进行全纯二次微分的处理，以探索高亏格模型的全局保角无缝参数化的实现。在此，我们揭示了已有方法不能保证高亏格模型的全局保角无缝参数化的原因，即：它们对高亏格模型进行剖分处理就指定了‘零点’位置（三线共享的交点），使得‘零点’分布不能保证满足Abel-Jacobi条件，而该条件是全纯二次微分有解的必要条件。基于调和叶状结构，我们可获得满足Abel-Jacobi条件的‘零点’位置，因而向高亏格模型的全局保角无缝参数化迈进了一步，目前已完成了一个近似方法。

致谢

特别感谢哈佛大学Steven J. Gortler教授2015年邀请本文第一作者访问哈佛大学，以及纽约石溪大学顾险峰教授对于全纯二次微分和叶状结构的讲解。本文的工作基于Steven J. Gortler 和顾险峰教授的相关工作。