

定积分计算的交互式验证

Verified interactive computation of definite integrals

许润清, 李黎明, 詹博华

International Conference on Automated Deduction, CADE. 2021: pp 485-503

联系方式: xurq@ios.ac.cn

研究背景: 如何保证符号计算的正确性?

1. 使用符号数学软件, 例如Mathematica, Maple等:

- 优点: 使用非常方便。
- 缺点: 不是所有计算都能完成, 并不能避免错误。

2. 使用交互式定理证明 (Isabelle, HOL Light, HOL4等)

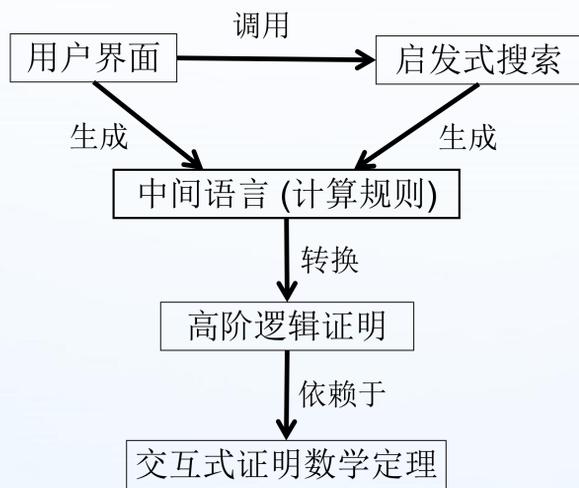
- 优点: 能够完全保证正确性。
- 缺点: 目前的工具使用非常困难, 需要理解高阶逻辑等理论知识。

能否结合符号数学软件的易用性和交互式定理证明的正确性保证?

可验证的定积分计算

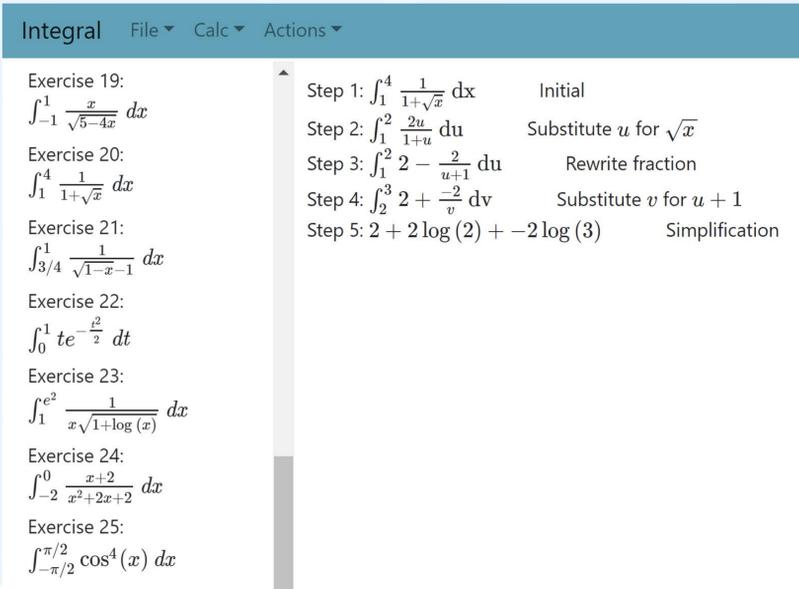
- 基本想法: 确定一个中间语言表达计算规则, 作为形式化证明和“非形式化”计算的分界线。
- 普通用户使用计算规则描述符号计算。
- 类似地, 高层的符号计算算法生成结果到计算规则的调用序列。
- 从计算规则的调用序列自动生成高阶逻辑证明, 保证正确性。

整体框架



用户界面

- 前端用户界面允许用户选择计算规则, 作用于当前的表达式, 并输入需要的参数。
- 系统根据规则的规范检验使用是否正确。
- 一致使用LaTeX显示公式, 达到符号计算软件的易用性:



中间语言

每条计算规则规范一个合法的计算步骤。例如:

$$\text{重写 } \int_a^b f(|g(x)|) dx \text{ 为 } \int_a^b f(g(x)) dx,$$

如果 $g(x) \geq 0$ 在 $x \in (a, b)$ 上成立。

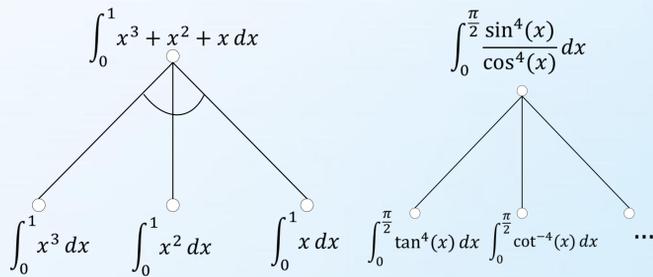
每条计算规则包含等式和附加条件, 涉及: 表达式的简化, 不等式的判定 (不需要是完备的), 其他规则关于替换、分部积分、等等。

计算规则

- 简化表达式
 $(x+1) \times (x-1) \Rightarrow x^2 - 1$
- 替换积分
 $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$
- 分部积分
 $\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$
- 三角函数替换
 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2x) + 1}{2} dx$
- 拆分积分
 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (a \leq c \leq b)$

启发式搜索

- 计算也可通过启发式搜索 (或其他更高级的算法) 自动构造。搜索算法输出计算规则的调用序列。
- 实现了James Slagle于1961年发表的博士论文中描述的启发式算法, 根据当前的表达式尝试不同计算规则。



高阶逻辑证明

从一个计算规则的调用序列, 自动生成支持该计算的高阶逻辑证明。

- 主要工作:
- 自动生成表达式简化的证明。
 - 自动生成不等式判定的证明。
 - 自动生成附加条件: 连续性、可导性、可积性、等等。

交互式证明数学定理

生成的证明依赖高阶逻辑定理:

- 关于实数的基本性质。
- 关于三角函数、指数、对数的基本性质。
- 关于连续性、可导性、可积性的定理。

为了保证所有这些定理的正确性 (包括所有附加条件), 需要在交互式定理证明器里完成证明。

大多数从HOL Light直接转换到HolPy, 部分已在HolPy中证明。