完美匹配数目在无K_8图子式时仍#P难

Radu Curticapean，夏盟佶

会议论文Parameterizing the Permanent: Hardness for fixed excluded minors
5th Symposium on Simplicity in Algorithms, SOSA 2022, 297-307

010-62661644 mingji@ios.ac.cn

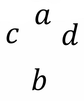
论文的主结果如标题所示，解题需要三个方面的简单背景知识：
完美匹配问题、图子式、#P难解性。

完美匹配问题

一个图的完美匹配是覆盖每个点恰好一次的一些边，作为边集的子集，其权重是所含边的权重之积。

图G的所有完美匹配权重之和记为#PM(G)。 例如，G是二部图时，设其邻接矩阵是$\begin{pmatrix} 0 & M \\ M' & 0 \end{pmatrix}$，它等于M的积和式，即 #PM(G)=Per(M)。

例： G



#PM(G)= $ab + cd$ =Per(M)

平面图#PM有多项式时间算法

图子式

一个图经过删边、删点、缩边得到的图就是它的图子式。

K_5表示5个点的完全图，$K_{3,3}$表示左右各3个点的完全二部图。

平面图即不含K_5图子式也不含$K_{3,3}$图子式的图。

无K_5图子式时
#PM有多项式时间算法

H可仅用一个交叉画在平面上的图，
无H图子式时，#PM有多项式时间算法
（利用了图结构定理）

同行的并行与后续研究：

1、深入关联图结构
法国同行Wiederrecht与Thilikos证明了一个新版本的图结构定理，从而推广了上方的结果；了解到本篇工作之后，结合了右侧的难解性结果，给出了#PM的计算难度与图结构关系的完整刻画。（尚未公开发表，但有报告 www.lirmm.fr/algco/GT/#27-01-22 ）

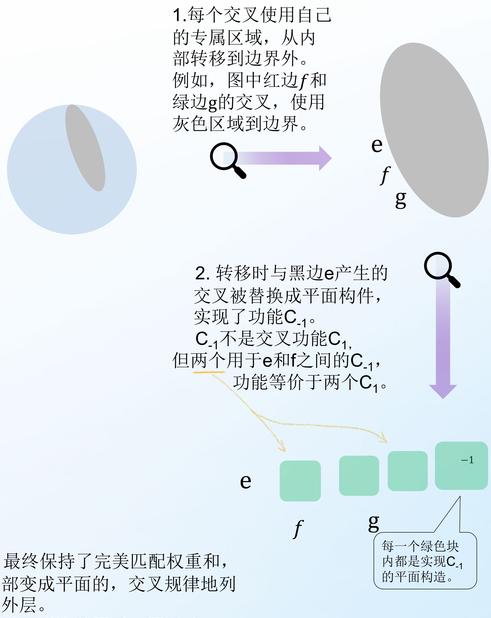
2、推广至更多的计数问题
在二分定理的研究中，有一类平面图时易解而一般图时难解的问题。在与软件所博士生孟泊宁的讨论中，已将难解性结论从#PM推广至这类问题上。

#PM问题是#P难的

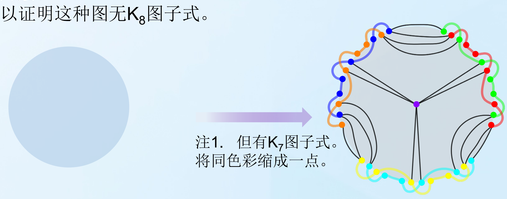
不含某个其他图子式时，
#PM问题的计算难度？

无K_8图子式时#PM是#P难的

证明概览：



3. 最终保持了完美匹配权重和，内部变成平面的，交叉规律地列于外层。
可以证明这种图无K_8图子式。



#P难解性

众所周知，SAT是一个NP难问题。其计数版本——#SAT，问CNF公式的可满足赋值的数目。

#SAT是#P中的一个NP难问题，而且还是#P难的。

如果一个#P难问题有多项式时间算法，#P中的任一问题，包括#SAT也有多项式时间算法。

注2. 在证明的环境中，可以使用多项式插值归约，利用只有0和1两种权重的完美匹配数目问题实现#PM，即完美匹配权重之和问题。
注3. 这个过程会导致图规模扩大至4次方，不会妨碍#P难解性的传递，但不适合指数类型的下界传递；有一个类似但较为复杂的过程，规模只扩大至平方，因而适合指数类型的复杂性下界分析。