

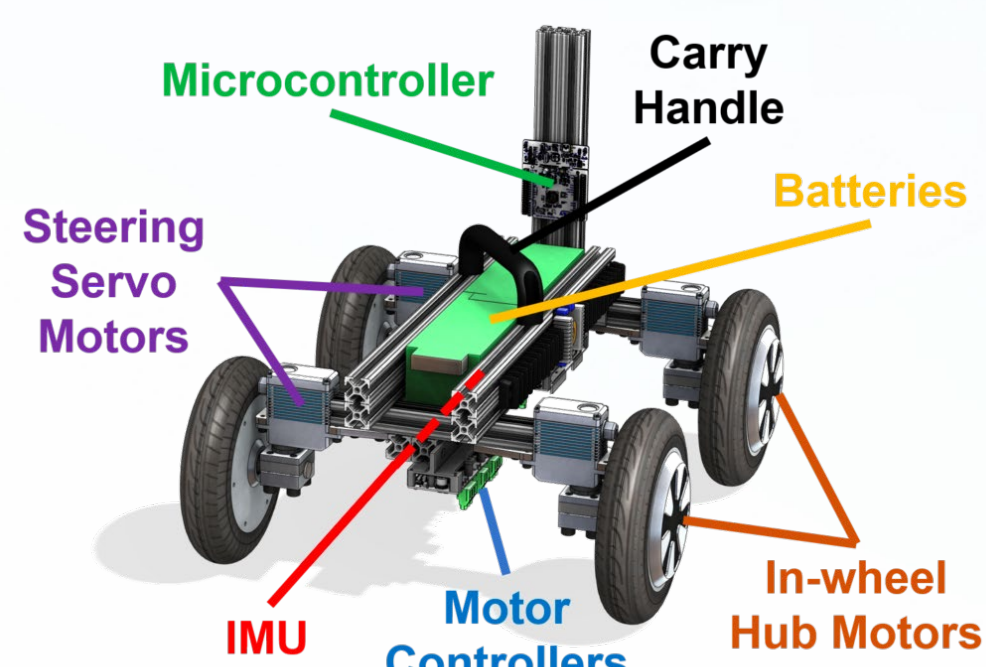
# PyBDR:基于Python语言开发的边界可达性分析工具

## 理论基础:初始集可达集的边界等于初始集边界的可达集

主要完成人:丁建强 薛白 主要联系人:丁建强 手机号:15361892735 邮箱:dingjianqiang0x@gmail.com

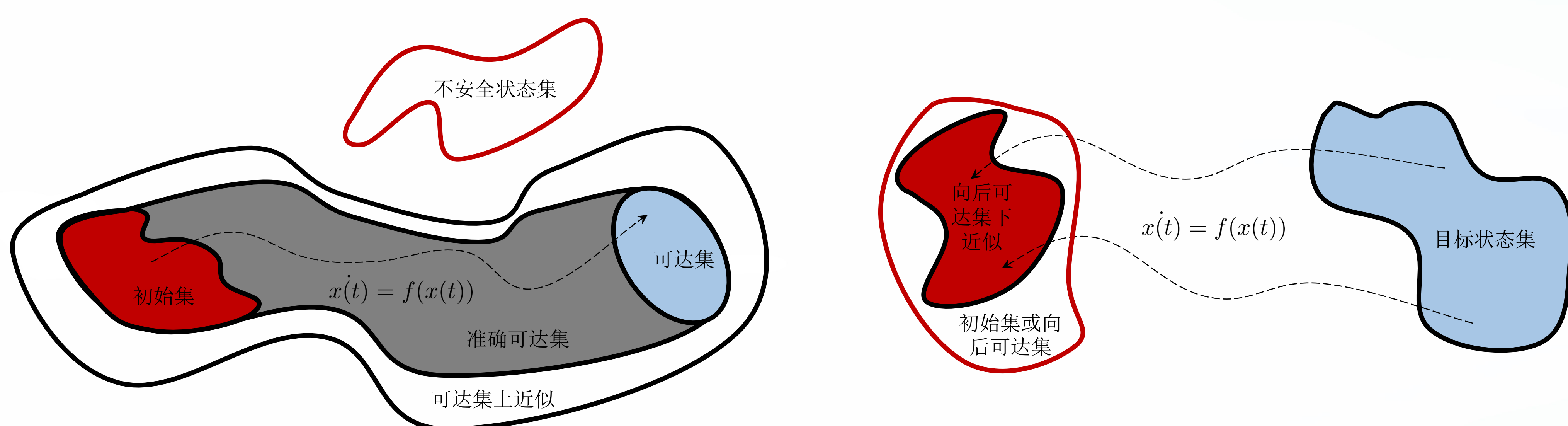
可达性分析作为分析安全攸关系统运行状态的重要理论支撑,是目前解决工业智能化领域中动力系统安全验证问题的重要工具,在自动驾驶、机器人控制等领域有着广泛的应用。

理论分析中,通常使用常微分方程对实际系统动力学行为进行数学建模:



$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

动力系统的安全性验证主要关注解决规避与可达两类问题,可达集计算是主要研究工具之一。规避问题为验证系统能否规避不安全状态集,可通过计算可达集上近似来验证;可达问题为确保系统进入目标状态集,可通过计算可达集下近似来实现。



可达集的上近似指的是可达集的超集。如果其不与不安全状态集相交,则准确可达集不与不安全状态集相交,系统安全。

可达集的下近似指的是可达集的子集。目标区域向后可达集的下近似是使系统到达目标状态集的初始状态集。

可达集上、下近似计算的精度是决定系统安全性质能否被验证的直接因素之一:可达集的上、下近似越接近准确可达集,越能验证系统准确验证系统安全与否。一般情况下,精度与初始集合的勒贝格测度成正比:初始集合勒贝格测度越大,可达集计算精度越低。本工具基于[1,2]中初始集可达集边界等于初始集边界可达集这一定理,只需计算初始集合边界的可达集即可实现对应精确可达集上、下近似的高精度计算。

### 基于边界分析的可达集上近似计算

$$\dot{x}_0 = x_1$$

$$\dot{x}_1 = \mu * (1 - x_0^2) * x_1 - x_0$$

上述系统在给定初始状态集:  $[1.23, 1.57] \times [2.34, 2.46]$ , 步长: 0.01时, 其从0到3.5秒的演化情况如右图所示, 其中框示区域内, 红色部分对应使用Matlab可达集计算工具箱CORA计算得到的可达集上近似, 蓝色部分对应利用PyBDR计算得到的可达集上近似。

结论: CORA给出的可达集上近似发散程度更大, 相比之下, PyBDR给出的上近似可达集更接近精确可达集, 结果更精确。

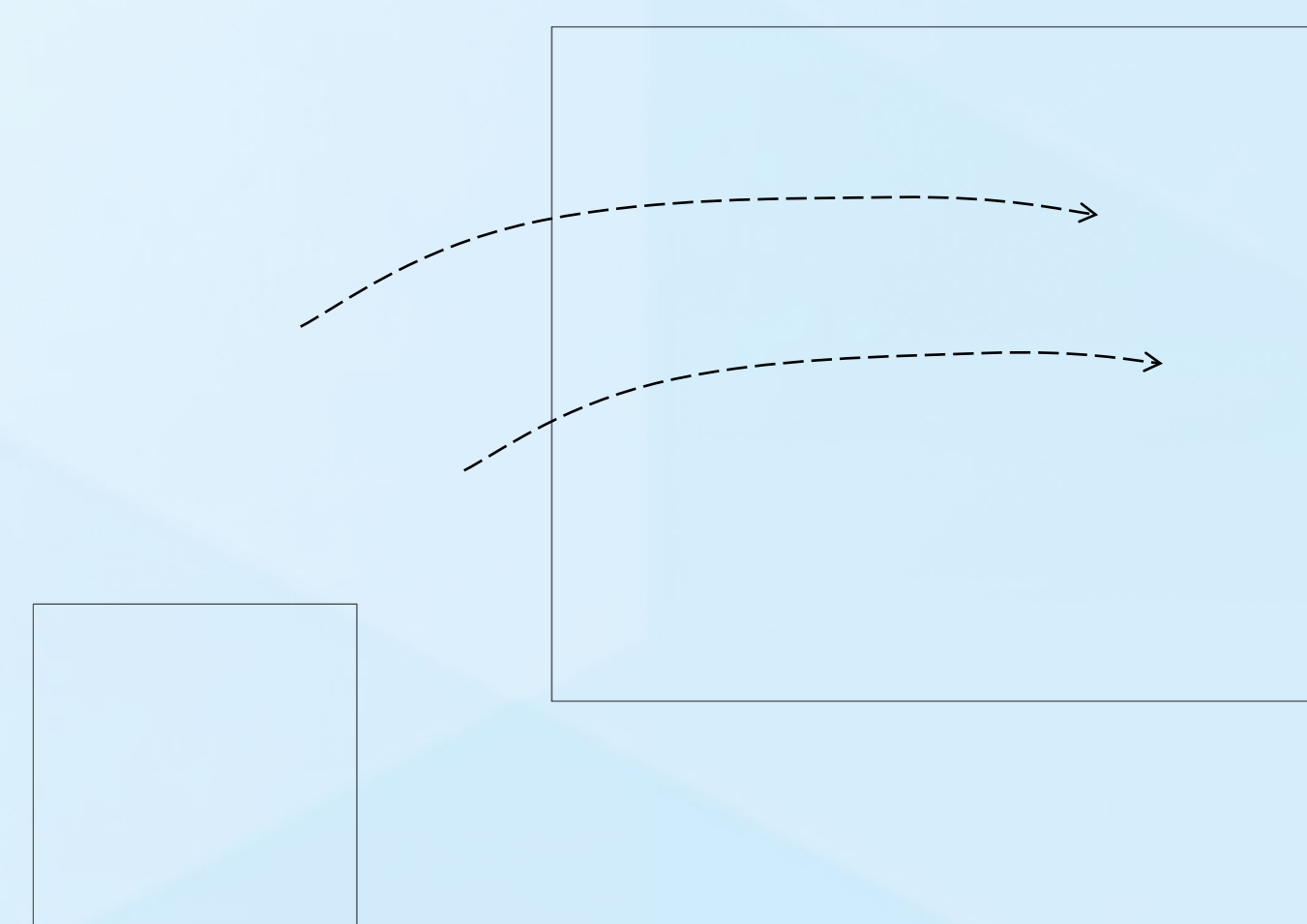


### 基于边界分析的可达集下近似计算

$$\dot{x}_0 = x_1$$

$$\dot{x}_1 = 0.2 - 0.7 * \sin(x_0) - 0.05 * x_1$$

上述系统在给定初始状态集:  $[-0.1, 2.9] \times [0.1, 3.1]$ , 步长: 0.3时, 其从0到2秒的演化情况如右图所示, 左下图示区域内为第1个步长的演算图示, 其中黑色矩形组成区域对应初始集边界第1个步长后的可达集上近似, 该区域内部蓝色多边形对应通过线性规划算法得到的初始集可达集下近似。图中状态轨迹说明向后可达集下近似中的状态可随时间正向演化进入目标区域。算法详见[2], 此计算方法已被集成到Matlab可达集计算工具箱CORA中。



[1] Xue B, Easwaran A, Cho N J, et al. Reach-avoid verification for nonlinear systems based on boundary analysis[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2016, 62(7): 3518-3523.

[2] Xue B, She Z, Easwaran A. Under-approximating backward reachable sets by polytopes[C]. International Conference on Computer Aided Verification. Springer, Cham, 2016: 457-476.